## EXERCICE N° 1 — 20' — 5 point

Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 2$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

2. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 = \dfrac{(u_n - 2)(u_n + 2)}{2(u_{n+1} + 2)}$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - 2 \leqslant \dfrac{3}{4}(u_n - 2)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n - 2 \leqslant 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
   (c) Prouver que la suite $u$ converge vers un réel que l'on précisera.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k u_k$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $0 \leqslant S_n - n(n+1) \leqslant 8n\left[1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$.
   (b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$

## EXERCICE N° 2 — 25' — 5 point

Soit $U$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \dfrac{3}{U_n}, \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n$ , $U_n \geq 2$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $|U_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - 3|$ ;
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $|U_n - 3| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ .
   (c) En déduire la limite de la suite $(U_n)$.

3. Soit $(V_n)$ la suite définie par $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1}$
   (a) Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique.
   (b) Exprimer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de $n$.


☎ : 23390248 - 29862267
Tous droits réservées ©TakiAcademy.com